

# Algorithmique des graphes

## Cours 2 – Encore des définitions

František Kardoš

`frantisek.kardos@u-bordeaux.fr`

# Plan

- ▶ Isomorphisme, sous-graphe (induit)
- ▶ Propriétés combinatoires des arbres
- ▶ Vocabulaire sur les graphes orientés

# Isomorphismes des graphes

Quand deux représentations / matrices / dessins représentent en fait le même graphe ?

# Isomorphismes des graphes

Quand deux représentations / matrices / dessins représentent en fait le même graphe ?

Soit  $G$  et  $H$  deux graphes simples. On dit que  $G$  et  $H$  sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que

$$uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H).$$

Autrement dit, la seule différence entre  $G$  et  $H$  est (éventuellement) une permutation des sommets ; les deux représentent les mêmes relations parmi des objets.

# Isomorphismes des graphes

Quand deux représentations / matrices / dessins représentent en fait le même graphe ?

Soit  $G$  et  $H$  deux graphes simples. On dit que  $G$  et  $H$  sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que

$$uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H).$$

Autrement dit, la seule différence entre  $G$  et  $H$  est (éventuellement) une permutation des sommets ; les deux représentent les mêmes relations parmi des objets.

Exercice du cours : Comment définir isomorphisme pour des graphes pas forcément simples ?

## Sous-graphe, sous-graphe induit

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un graphe  $G' = (V', E')$  avec  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$  est un *sous-graphe* de  $G$ .

## Sous-graphe, sous-graphe induit

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un graphe  $G' = (V', E')$  avec  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$  est un *sous-graphe* de  $G$ .

Si  $V(G') = V(G)$ , on dit que  $G'$  est un sous-graphe *couvrant* de  $G$ .

## Sous-graphe, sous-graphe induit

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un graphe  $G' = (V', E')$  avec  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$  est un *sous-graphe* de  $G$ .

Si  $V(G') = V(G)$ , on dit que  $G'$  est un sous-graphe *couvrant* de  $G$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, soit  $X \subseteq V$  un ensemble de sommets de  $G$ . Le sous-graphe de  $G$  induit par  $X$  est défini comme

$$G[X] = (X, \{uv \in E(G) : u, v \in X\}).$$

## Chaînes (rappel)

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un graphe est *connexe* si tout sommet est accessible depuis n'importe quel autre sommet.

Deux sommets sont *accessibles* entre eux s'il existe une chaîne les reliant.

## Chaînes (rappel)

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un graphe est *connexe* si tout sommet est accessible depuis n'importe quel autre sommet.

Deux sommets sont *accessibles* entre eux s'il existe une chaîne les reliant.

Une chaîne est *simple* si elle passe par toute arête au maximum une fois.

Une chaîne est *élémentaire* si elle passe par toute arête et par tout sommet au maximum une fois.

# Chaînes

Une chaîne est *simple* si elle passe par toute arête au maximum une fois.

Une chaîne est *élémentaire* si elle passe par toute arête et par tout sommet au maximum une fois.

## Lemme

*S'il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$  dans un graphe  $G$ , alors il existe aussi une chaîne élémentaire les reliant.*

# Chaînes

Une chaîne est *simple* si elle passe par toute arête au maximum une fois.

Une chaîne est *élémentaire* si elle passe par toute arête et par tout sommet au maximum une fois.

## Lemme

*S'il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$  dans un graphe  $G$ , alors il existe aussi une chaîne élémentaire les reliant.*

*Preuve.* Il suffit d'enlever des sous-chaînes entre des répétitions du même sommet.

# Chaînes

Une chaîne est *simple* si elle passe par toute arête au maximum une fois.

Une chaîne est *élémentaire* si elle passe par toute arête et par tout sommet au maximum une fois.

## Lemme

*S'il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$  dans un graphe  $G$ , alors il existe aussi une chaîne élémentaire les reliant.*

*Preuve.* Il suffit d'enlever des sous-chaînes entre des répétitions du même sommet.

*Autre preuve.* Considérons la chaîne la plus courte entre  $u$  et  $v$ . Elle est forcément élémentaire.

# Chaînes dans des arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

## Lemme

*Soit  $G$  un arbre. Pour toute paire de sommets  $u, v$  il existe une et une seule chaîne élémentaire les reliant.*

# Chaînes dans des arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

## Lemme

*Soit  $G$  un arbre. Pour toute paire de sommets  $u, v$  il existe une et une seule chaîne élémentaire les reliant.*

*Preuve.*

# Chaînes dans des arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

## Lemme

*Soit  $G$  un arbre. Pour toute paire de sommets  $u, v$  il existe une et une seule chaîne élémentaire les reliant.*

*Preuve.*

L'existence d'une chaîne reliant  $u$  et  $v$  est garantie par la connexité de  $G$ .

# Chaînes dans des arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

## Lemme

*Soit  $G$  un arbre. Pour toute paire de sommets  $u, v$  il existe une et une seule chaîne élémentaire les reliant.*

*Preuve.*

L'existence d'une chaîne reliant  $u$  et  $v$  est garantie par la connexité de  $G$ .

S'il existait deux chaînes élémentaires différentes reliant  $u$  et  $v$ , on trouverait dans le graphe  $G$  un cycle, une contradiction avec la supposition  $G$  étant un arbre.

# La taille d'un arbre

Un arbre à  $n$  sommets, combien peut-il avoir d'arêtes ?

# La taille d'un arbre

Un arbre à  $n$  sommets, combien peut-il avoir d'arêtes ?

Soit  $G$  un graphe avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes. Reconstituons  $G$  à partir d'un graphe  $G_0$  sans arête en ajoutant les arêtes de  $G$  une par une.

# La taille d'un arbre

Un arbre à  $n$  sommets, combien peut-il avoir d'arêtes ?

Soit  $G$  un graphe avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes. Reconstituons  $G$  à partir d'un graphe  $G_0$  sans arête en ajoutant les arêtes de  $G$  une par une.

$G_0$  se décompose en  $n$  composantes connexes – tout sommet est une composante connexe tout seul.

# La taille d'un arbre

Un arbre à  $n$  sommets, combien peut-il avoir d'arêtes ?

Soit  $G$  un graphe avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes. Reconstituons  $G$  à partir d'un graphe  $G_0$  sans arête en ajoutant les arêtes de  $G$  une par une.

$G_0$  se décompose en  $n$  composantes connexes – tout sommet est une composante connexe tout seul.

En ajoutant une arête, soit le nombre de composantes connexes diminue de 1, soit un cycle est créé.

## Lemme

Un graphe *sans cycle* a au *maximum*  $n - 1$  arêtes. S'il a exactement  $n - 1$  arêtes, il est forcément *connexe*.

# La taille d'un arbre

Un arbre à  $n$  sommets, combien peut-il avoir d'arêtes ?

Soit  $G$  un graphe avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes. Reconstituons  $G$  à partir d'un graphe  $G_0$  sans arête en ajoutant les arêtes de  $G$  une par une.

$G_0$  se décompose en  $n$  composantes connexes – tout sommet est une composante connexe tout seul.

En ajoutant une arête, soit le nombre de composantes connexes diminue de 1, soit un cycle est créé.

## Lemme

*Un graphe **connexe** a au **minimum**  $n - 1$  arêtes. S'il a exactement  $n - 1$  arêtes, il est forcément **sans cycle**.*

# La taille d'un arbre

Un arbre à  $n$  sommets, combien peut-il avoir d'arêtes ?

## Théorème

*Soit  $G$  un graphe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1.  $G$  est un arbre (c-à-d connexe et sans cycle) ;*
- 2.  $G$  est connexe et  $m = n - 1$  ;*
- 3.  $G$  est sans cycle et  $m = n - 1$  ;*
- 4.  $G$  est connexe, en plus, la suppression de n'importe quelle arête le déconnecte ;*
- 5.  $G$  est sans cycle, en plus, l'ajout de n'importe quelle arête crée un cycle.*

# Graphes orientés

Un graphe orienté  $G = (V, E)$  est un couple d'ensembles finis, dont

- ▶  $V$  est l'ensemble de *sommets* de  $G$ , et
- ▶  $E$  est l'ensemble d'*arcs* de  $G$ , où

tout arc relie un sommet à un (autre) sommet.

Si l'arc  $e$  relie  $u$  à  $v$ , on écrit  $e = uv$ , on dit que

- ▶  $uv$  est un arc sortant de  $u$ ,
- ▶  $v$  est un voisin sortant / successeur de  $u$ ,
- ▶  $uv$  est un arc entrant à/de  $v$ ,
- ▶  $u$  est un voisin entrant / prédécesseur de  $v$ .

# Graphes orientés – représentations

- ▶ Les listes de successeurs : pour chaque sommet du graphe la liste de ses successeurs ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets  $v_i$  et  $v_j$  il est indiqué s'il existe un arc de  $v_i$  à  $v_j$  ;
- ▶ La matrice d'incidence : pour chaque sommet  $v_i$  et pour chaque arc  $e_j$  il est indiqué si l'arc  $e_j$  est un arc sortant ( $-1$ ) ou entrant ( $+1$ ) du sommet  $v_i$ .

# Graphes orientés : Degrés

Le *degré sortant*  $deg^+(v)$  d'un sommet  $v$  est la longueur de la liste de successeurs de  $v$ .

Le degré sortant d'un sommet  $v$  est égal au nombre d'arcs sortants de  $v$ .

# Graphes orientés : Degrés

Le *degré sortant*  $deg^+(v)$  d'un sommet  $v$  est la longueur de la liste de successeurs de  $v$ .

Le degré sortant d'un sommet  $v$  est égal au nombre d'arcs sortants de  $v$ .

Le *degré entrant*  $deg^-(v)$  d'un sommet  $v$  est la longueur de la liste de prédécesseur de  $v$ .

Le degré entrant d'un sommet  $v$  est égal au nombre d'arcs entrants de  $v$ .

# Cheminement

Dans un graphe orienté  $G$ , un *chemin* de  $u$  à  $v$  est une séquence d'arcs consécutifs, par exemple  $(u_0 u_1, u_1 u_2, \dots, u_{k-1} u_k)$ , telle que  $u = u_0$  et  $v = u_k$ .

La *longueur* d'un chemin est le nombre d'arcs qui le composent (ici  $k$ ).

# Cheminement

Dans un graphe orienté  $G$ , un *chemin* de  $u$  à  $v$  est une séquence d'arcs consécutifs, par exemple  $(u_0 u_1, u_1 u_2, \dots, u_{k-1} u_k)$ , telle que  $u = u_0$  et  $v = u_k$ .

La *longueur* d'un chemin est le nombre d'arcs qui le composent (ici  $k$ ).

On dit qu'un sommet  $v$  est *accessible* à partir du sommet  $u$  s'il existe un chemin de  $u$  à  $v$ .

Un graphe orienté est dit *fortement connexe* si ses sommets sont tous accessibles entre eux, i.e., pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  et aussi un chemin de  $v$  à  $u$ .

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

À partir des listes de successeurs :

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

À partir des listes de successeurs :

Il faut parcourir toutes les listes et compter le nombre total d'occurrences de  $v$  dans l'ensemble des listes.

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

À partir des listes de successeurs :

Il faut parcourir toutes les listes et compter le nombre total d'occurrences de  $v$  dans l'ensemble des listes.

À partir de la matrice d'adjacence :

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

À partir des listes de successeurs :

Il faut parcourir toutes les listes et compter le nombre total d'occurrences de  $v$  dans l'ensemble des listes.

À partir de la matrice d'adjacence :

Il suffit de calculer la somme de la colonne du sommet  $v$ .

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

À partir des listes de successeurs :

Il faut parcourir toutes les listes et compter le nombre total d'occurrences de  $v$  dans l'ensemble des listes.

À partir de la matrice d'adjacence :

Il suffit de calculer la somme de la colonne du sommet  $v$ .

À partir de la matrice d'incidence :

## Exercice

Pour chacune des trois représentations, concevoir un algorithme qui, étant donné un graphe orienté  $G$  et un sommet  $v$  de  $G$ , calcule le degré entrant de  $v$ .

À partir des listes de successeurs :

Il faut parcourir toutes les listes et compter le nombre total d'occurrences de  $v$  dans l'ensemble des listes.

À partir de la matrice d'adjacence :

Il suffit de calculer la somme de la colonne du sommet  $v$ .

À partir de la matrice d'incidence :

Il suffit de calculer le nombre de  $+1$  dans la ligne de  $v$ .